Educación

Secretaría de Educación Pública

Programa de Estudios

de la UAC del Recurso Sociocognitivo de
Pensamiento Matemático

Temas Selectos de Matemáticas I

Cuarto Semestre

Educación
Secretaría de Educación Pública

DGB

Primera edición, 2024

Secretaría de Educación Pública

Subsecretaría de Educación Media Superior

Dirección General del Bachillerato

Av. Revolución 1425, Col. Campestre.

Álvaro Obregón, C.P. 01040, Ciudad de México.

Distribución gratuita.

Prohibida su venta.

Contenido

Presentación

La Dirección General del Bachillerato (DGB) presenta las Progresiones de Aprendizaje de las diversas Áreas de Conocimiento y de los Recursos Sociocognitivos del Componente Fundamental Extendido, para el Plan de estudios propio de esta Dirección General.

Estas tienen su sustento, teórica y conceptual, en el modelo educativo del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS)[1] y dan cumplimiento a las atribuciones conferidas a esta Dirección General por el Reglamento Interior de la Secretaría de Educación Pública (SEP), en el cual se establece, en el Artículo 19 Fracciones I y II la importancia de "*proponer las normas pedagógicas, contenidos, planes y programas de estudio, métodos, materiales didácticos e instrumentos para la evaluación del aprendizaje del bachillerato general, en sus diferentes modalidades y enfoques, y difundir los vigentes*"; además de "*impulsar las reformas curriculares de los estudios de bachillerato que resulten necesarias para responder a los requerimientos de la sociedad del conocimiento y del desarrollo sustentable*"(RISEP, 2020).

En este sentido, los planteamientos del MCCEMS buscan una formación integral en el estudiantado mediante el desarrollo de la capacidad creadora, productiva, libre y digna del ser humano, conformando una ciudadanía que tenga amor al país, a su cultura e historia. Por ello, el Bachillerato General plantea las diversas Unidades de Aprendizaje Curricular (UAC) para que, con sus estudiantes egresados y egresadas contribuya al logro de su objetivo específico, el cual radica en la "*conformación de una ciudadanía reflexiva, con capacidad de formular y asumir responsabilidades de manera comunitaria, interactuar en contextos plurales y propositivos, trazarse metas y aprender de manera continua y colaborativa*".

En este contexto, se presentan la UAC [NOMBRE DE LA UAC] específica del Bachillerato General, con objetivos delimitados acorde a las características del subsistema y de la población a la cual se dirige. El documento se encuentra conformado por apartados mediante los cuales se describe no solo la fundamentación, sino los elementos claves para su implementación en el aula. El primero corresponde a la justificación de la UAC, qué lugar ocupa y cuál es su función al interior del currículo de la Educación Media Superior (EMS); el segundo, pertenece a los fundamentos donde se concentra la relevancia y propósitos, así como su impacto en la comunidad; el tercero se refiere a los conceptos básicos diferentes según Recurso Sociocognitivo de la UAC; y en el cuarto se desarrollan las progresiones de aprendizaje que se elaboraron de manera colegiada por personal docente de diversos estados con experiencia disciplinar, así como con personal colaborador de la Dirección General del Bachillerato, para finalmente contar con la revisión y validación por parte de la Coordinación Sectorial de Fortalecimiento Académico de la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS).

---

[1] El cual puede ser consultado a través del siguiente enlace:
https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/13516/1/images/Documento%20base%20MCCEMS.pdf

Programa de Estudios de la Temas Selectos de Matemáticas I

Semestre	Cuarto	
Créditos	8	
Componente	Fundamental extendido obligatorio	
Horas de Mediación Docente	**Semestral**	**Semanal**
	64	4

I. Introducción

Educar en el siglo XXI demanda una visión holística y transversal del entorno para hacer frente a los retos del futuro, modificando el presente a través de los aprendizajes y experiencias del pasado, para ello, la matemática proporciona relaciones abstractas que van más allá de simples algoritmos. La construcción de ideas matemáticas en el estudiantado está asociada a factores tales como observación, imaginación, intuición, representación y comunicación. Es el resultado de aproximaciones sucesivas construidas a través de significados aritméticos, algebraicos, geométricos, estocásticos y variacionales, considerando aspectos culturales, históricos y sociales.

En Temas Selectos de Matemáticas I se busca ahondar en conceptos geométricos y trigonométricos que fomentarán el desarrollo del pensamiento matemático a través del entendimiento y modelación matemática del entorno del estudiantado. Las anotaciones didácticas están orientadas para que se deduzca el enfoque adecuado que permita trabajar la estructura, el orden y las relaciones a través de la profundización de conceptos formales utilizados en el recurso sociocognitivo de Pensamiento Matemático, considerando particularmente elementos de Geometría Euclidiana, Trigonometría y Geometría Analítica. Temas Selectos de Matemáticas I comienza con el estudio de conceptos fundamentales de Geometría Euclidiana, en específico, conceptos como ángulo, semejanza y congruencia, así como, relaciones como las razones trigonométricas. Posteriormente se lleva a cabo una revisión de las leyes de senos y cosenos y el inverso del Teorema de Pitágoras, se profundiza en el estudio de los Axiomas de Euclides y se revisan algunas Geometrías no euclidianas y sus propiedades. Luego, se llevará a cabo un estudio detallado de las secciones cónicas desde la perspectiva de la Geometría Analítica y sus aplicaciones para fortalecer las técnicas geométricas-algebraicas a través de la revisión principalmente de la parábola, circunferencia y elipse. Una vez concluida esta parte, se tendrá una aproximación a la exploración de los fractales, estudiando aquellos ejemplos más conocidos y revisando sus principales propiedades.

Estas anotaciones pueden encontrarse a lo largo de este documento y son fundamentales para lograr dimensionar el nivel con que se estará abordando cada progresión.

La UAC de Temas Selectos de Matemáticas I, se ubica dentro del componente de formación fundamental extendido obligatorio de cuarto semestre y surge para complementar el estudio de las problemáticas centrales de los Pensamientos Matemáticos I , II y III, así como dar un planteamiento para abordar Temas Selectos de Matemáticas II. En esta UAC se busca establecer el aula como laboratorio social, permitiendo la transversalidad mediante los Recursos Sociocognitivos, Socioemocionales y en conjunto con todas las Áreas de Conocimiento.

Con el planteamiento de las progresiones de aprendizaje se especifica el qué enseñar, aprender y el qué desarrollar en la presente UAC para todos los subsistemas de la EMS en el país, sin hacer distinción de las modalidades del bachillerato. A continuación, se presentan cada una de las 9 progresiones que corresponde al programa de estudios de Temas Selectos de Matemáticas I, así como las relaciones con las metas, categorías y subcategorías.

Unidades de Aprendizaje Curricular	Semestre	Horas Semanales			Horas Semestrales			Créditos
		MD	EI	Total	MD	EI	Total	
Temas Selectos de Matemáticas I	4	4	1	5	64	16	80	8

II. Aprendizajes de trayectoria

Temas Selectos de Matemáticas I, al formar parte del Recurso sociocognitivo de Pensamiento Matemático, considera los mismos aprendizajes de trayectoria, los cuales se explicitan en el acuerdo secretarial 09/08/23 y se presentan a continuación:

- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.

- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).

- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.

- Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

III. Progresiones de aprendizaje, metas de aprendizaje, categorías y subcategorías

Análogamente a los aprendizajes de trayectoria, Temas Selectos de Matemáticas I al formar parte del Recurso sociocognitivo de Pensamiento Matemático, considera las mismas categorías, subcategorías y metas de aprendizaje, las cuales se explicitan en el acuerdo secretarial 09/08/23 y se presentan a continuación:

Categorías y subcategorías

Categoría I. Procedural

Esta categoría engloba los procesos propios de la ejecución mecanizada e incluso automatizada de algoritmos y procedimientos, así como también el acto de interpretar los resultados que arrojan dichos procedimientos algorítmicos.

Subcategorías

Elementos aritméticos-algebraicos

Comprende los recursos procedurales involucrados en la manipulación tanto aritmética como algebraica de objetos matemáticos.

Elementos geométricos

Se refiere a la manipulación de objetos geométricos tales como puntos, líneas, figuras, planos, etc. Algunas veces relacionados con propiedades o con sistemas de referencia mediante el uso de coordenadas y/o magnitudes.

Elementos variacionales

Comprende los recursos procedurales involucrados en la manipulación de objetos matemáticos relacionados con la variación tales como funciones y límites.

Manejo de datos e incertidumbre

Considera el uso e interpretación de datos y el cálculo de posibilidades. Incluye desde la recolección de datos, la revisión de los términos básicos utilizados en probabilidad y estadística y las formas en que se recolectan datos a partir de una necesidad específica, así como las ventajas de elegir una forma para organizarlos, interpretarlos y utilizarlos en la toma de decisiones en ambientes de incertidumbre.

La primera categoría constituye un grupo inicial de recursos y corresponden al dominio de los recursos procedurales, lleva a describir y ejecutar procedimientos matemáticos, en forma sintética o extendida, automatizada o como una secuencia razonada de pasos. En las diferentes áreas de la matemática hay formas de hacer, de resolver, de simplificar, etc., por eso su contenido se vuelve un valioso recurso al emplearlos en la solución de problemas y en la toma de decisiones.

Categoría 2. Procesos de Intuición y razonamiento

Esta categoría incluye procesos fundamentales en el quehacer matemático como lo son la observación, la intuición, el acto de formular conjeturas y la argumentación. La matemática tiene una cualidad dual: la intuición y la formalidad. Todo descubrimiento o creación matemática parte de la intuición, de un chispazo que resulta complicado de describir, el cual no se articula a través de una serie de pasos lógicos secuenciales. La forma en que una idea nace casi nunca es lógica. Por otro lado, la matemática exige, para poder continuar desarrollándose, la formalización y presentación lógica y formal de aquellas ideas que el individuo aprehendió intuitivamente; de suerte tal que existe una especie de proceso dialéctico en el desarrollo de la matemática que va de la intuición a la formalidad y que se repite constantemente.

Es importante mencionar que los procesos cognitivos que se buscan desarrollar en el estudiantado en esta etapa no pretenden tener el mismo acabado que aquellos que desarrollan los profesionales de la matemática, pero sí ser fundamentalmente dichos procesos, pero a un nivel de complejidad adecuado al desarrollo del estudiante.

Subcategorías

Capacidad para observar y conjeturar

Los descubrimientos a los que ha llegado el ser humano se han realizado después de que ha sido capaz de observar algún elemento crucial de su objeto de estudio. A partir de sus observaciones y de su experiencia previa, el ser humano lanza conjeturas: afirmaciones que pueden ser verdaderas o falsas y que demandan una mayor investigación y reflexión.

Pensamiento intuitivo

Muy relacionada con la subcategoría anterior, la subcategoría de Pensamiento intuitivo engloba aquellos procesos cognitivos por los cuales el ser humano comprende en una primera aproximación los objetos matemáticos y fenómenos de diversa índole, no necesariamente teórica.

Pensamiento formal

La matemática para poder continuar desarrollándose necesita una presentación formal. Con esta subcategoría estamos englobando aquellas habilidades involucradas al producir argumentaciones rigurosas en favor o en contra de afirmaciones tanto matemáticas como de diversa naturaleza.

La propuesta es llevar al estudiantado a participar de estos procesos cognitivos. Un estudiante puede observar, intuir, conjeturar y argumentar, evidentemente no al nivel de complejidad con que realiza estas acciones la o el investigador de matemáticas, pero la diferencia es más de orden cuantitativo que cualitativo.

Categoría 3. Solución de problemas y modelación

Esta categoría engloba aquellos procesos que suceden cuando describimos un fenómeno utilizando técnicas y lenguaje matemático o resolvemos un problema, entendiendo a este último como un planteamiento al que no se le puede dar respuesta empleando procedimientos mecánicos (obsérvese cómo esta definición de problema depende y varía de individuo a individuo). La modelación se entiende como el uso de la matemática y su lenguaje en la descripción de fenómenos de diversa naturaleza.

Subcategorías

Uso de Modelos

Emplear una representación abstracta, conceptual, gráfica o simbólica para describir un fenómeno o de un proceso, verificando el cumplimiento de las hipótesis necesarias, para analizar la relación entre sus variables lo que permite comprender fenómenos naturales, sociales, físicos y otros y además, resolver problemas.

Construcción de Modelos

Implica, entre otras cosas, la búsqueda, delimitación y determinación de las variables adecuadas para describir la situación, problema o fenómeno estudiado.

Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios

La heurística se refiere a estrategias, métodos, criterios o astucias utilizados para hacer posible la solución de problemas complejos. Un procedimiento es no rutinario cuando no basta con aplicar una regla o un método mecanizado o de carácter algorítmico o establecido, sino que requiere cierta intuición y búsqueda poniendo en práctica un conjunto de conocimientos y de experiencias anteriores.

La tercera categoría dota de recursos para solucionar problemas y plantear modelos, desde una perspectiva global, estos recursos son útiles para comprender el problema, diseñar y ejecutar un plan y probar el resultado. Con estos recursos se resuelven situaciones problemáticas y describen fenómenos empleando el pensamiento matemático.

Categoría 4. Interacción y lenguaje matemático

La matemática posee un lenguaje, el cual resulta ser riguroso, y que, a su vez, convive y se comunica a través de diversos lenguajes naturales (español, lenguas indígenas, inglés, lengua de señas, etc.) Esta categoría engloba las consideraciones propias que el o la practicante del pensamiento matemático debe tener en mente cuando comunica sus ideas, entendiendo que un lenguaje natural y un lenguaje formal tienen puntos de convergencia y puntos de divergencia; en ambos casos buscamos que el estudiantado sea riguroso con el uso de estos lenguajes.

Subcategorías

Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico

Esta subcategoría se articula al establecer jerarquías, agrupaciones, composiciones, el uso formal de símbolos e imágenes respetando las propiedades y reglas.

Negociación de significados

Esta subcategoría se aplica al revisar tanto individual como colectivamente los significados de las expresiones, sus posibles sentidos e interpretaciones, así como la generación de expresiones y representaciones formales asociadas.

Ambiente matemático de comunicación

Se describe así al ambiente generado para transmitir ideas, inquietudes, conjeturas y conceptos matemáticos empleando lenguajes naturales y formales.

La cuarta categoría aporta al individuo recursos para emplear el lenguaje matemático y para interactuar con personas de su entorno dando una dimensión social al aprendizaje.

Metas de aprendizaje

Metas de Aprendizaje			
C1M1	**C2M1**	**C3M1**	**C4M1**
Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural
C1M2	**C2M2**	**C3M2**	**C4M2**
Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
C1M3	**C2M3**	**C3M3**	**C4M3**
Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos	Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o evaluación.

		socioemocionales y de su entorno.	
	C2M4	**C3M4**	
	Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	

Progresiones de Aprendizaje

Las Progresiones de Aprendizaje son unidades didácticas innovadoras y flexibles para la descripción secuencial de los aprendizajes asociados a la comprensión y solución de necesidades y problemáticas personales y/o sociales (DOF, 09/08/23).

Temas Selectos de Matemáticas I

Progresión 1: Resuelve situaciones-problema contextualizadas, a través de la exploración y desarrollo de elementos básicos de la geometría y trigonometría, tales como, ángulos, semejanza, congruencia y autosemejanza, observando la relación entre los lados y ángulos del triángulo rectángulo como razones trigonométricas, destacando la importancia de entes abstractos en la vinculación con otras Unidades de Aprendizaje Curricular, promoviendo el uso de herramientas tecnológicas.

Metas	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **C1M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. **C1M3.** Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritmético-algebraicos **S2.** Elementos geométricos

C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento	**S1.** Capacidad para observar y conjeturar
C3M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno. **C3M4.** Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios

Anotaciones didácticas: Se sugiere abordar esta progresión a partir del estudio de problemáticas que permitan el desarrollo de temáticas de geometría y trigonometría, que sean familiares y cotidianas al estudiantado y no caer en la simple presentación teórica de definiciones, conceptos o propiedades. Se recomienda aprovechar la progresión para salir del aula y buscar problemáticas en el entorno.

Al mismo tiempo, se debe motivar la exploración de conceptos básicos de geometría que se consideren necesarios para el abordaje de las progresiones posteriores a través del planteamiento de problemáticas y no al revés, es decir, a partir de considerar una problemática real, comenzar a desarrollar las herramientas necesarias para su solución e ir llevando al estudiantado en su solución haciendo énfasis en la necesidad del uso de los conceptos y herramientas previamente exploradas.

No se pretende que se aborde de primer contacto las razones trigonométricas, sino, que se enfrente al estudiantado a problemáticas que le permitan ver que el Teorema de Pitágoras no es suficiente para llegar a la solución de un problema y necesita explorar otros elementos del triángulo como sus ángulos y la relación estrecha que hay entre ellos y los lados del mismo, considerando que en la Geometría

Euclidiana la suma de los ángulos internos de todo triángulo suman 180°, se debe buscar la exploración de problemáticas como las siguientes,

1.- En la ciudad de Xalapa debido a los trabajos de mantenimiento se pintará el monumento de la araucaria. Para ello, se requiere de una grúa con un brazo mecánico que permita llegar hasta la parte más alta de la estructura, sin embargo, por el tipo de suelo del sitio y la estructura misma, la grúa no puede acercarse mucho a ésta. La máquina se coloca en cierto punto donde el brazo alcanza la parte más alta con un ángulo de 60°, posteriormente avanza 8 metros y el ángulo del brazo toma un valor de 80°. Se necesita conocer la cantidad de pintura que se requiere para pintar la estructura, por ello, se necesita saber su altura. Si con 25 litros de pintura se logra pintar un metro de altura de la escultura, ¿cuántos litros de pintura se necesitan para pintarla en su totalidad?

2.- En el patio de tu Colegio, se colocarán dos pequeños viveros para hacer huertos, uno con forma triangular y el otro con forma rectangular, sin embargo, alrededor de estos debe hacerse un tratamiento al suelo, colocando, grava, piedras generando un contorno con espesor, lo cual genera dos figuras, una interna y otra externa. ¿Son estas figuras semejantes para ambos casos?

**La motivación de este ejercicio es que el estudiantado examine que, para el caso del triángulo, dichas figuras generadas son semejantes, mientras que para el rectángulo no necesariamente es así, pues, el caso del rectángulo no cumple que estos sean proporcionales, salvo casos particulares. Más aún, se pueden asignar algunas medidas para observar cómo por medio de la semejanza puede calcularse el área del triángulo interno, pero no del rectángulo interno.*

A partir de problemáticas como estas, se puede contextualizar según se requiera la revisión de elementos geométricos y trigonométricos, de manera que se aborden problemáticas propias del estudiantado considerando elementos que estén en la escuela o su contexto, así, se puede dar partida de la exploración de conceptos y herramientas necesarias para su solución, tales como, los ángulos, la semejanza, los triángulos rectángulos, las razones trigonométricas y el planteamiento de ecuaciones.

En este momento se debe tener especial cuidado con cómo es que al resolver problemáticas geométricas del entorno la modelación lleva a la representación de tres dimensiones a dos dimensiones, es decir, cómo es que se aprovecha la representación de una cara bidimensional para el abordaje y solución del problema.

Progresión 2: Explora algunas leyes y relaciones matemáticas que permitan dar solución a problemas cotidianos a través de la geometría y trigonometría, considera el recíproco del Teorema de Pitágoras, la Ley de Senos, la Ley de Cosenos como una generalización del Teorema de Pitágoras, la circunferencia unitaria, explorando razonamientos y demostraciones sencillas facilitando la formalización de los conceptos.

Metas	Categorías	Subcategorías

C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **C1M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. **C1M3.** Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritmético-algebraicos **S2.** Elementos geométricos
C2M2. Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación. **C2M4.** Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento	**S1.** Capacidad para observar y conjeturar **S2.** Pensamiento intuitivo **S3.** Pensamiento formal
C3M1. Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto. **C3M3**. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S1.** Uso de modelos **S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios

propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.		

Anotaciones didácticas: Se sugiere aprovechar esta progresión para explorar relaciones geométricas y trigonométricas más específicas, al mismo tiempo que se busque la formalización de algunas de ellas, explorando y mostrando alguna demostración o construcción de estas, considerando el planteamiento de problemáticas que motiven el desarrollo de dichos contenidos matemáticos.

Más aún, si el grupo lo requiere, se puede aprovechar este momento de la progresión para ahondar en el estudio de ángulos cuadrantales y traslación de ángulos, mostrando cómo esto facilita la solución de los problemas en sí.

Se debe buscar fomentar la discusión y análisis más formal considerando algunas relaciones particulares, por ejemplo, para el caso del Teorema de Pitágoras, su inverso y la ley de cosenos puede discutirse la siguiente situación:

Supongamos que se tiene un triángulo ABC donde $\angle ACB$ = 90°, es decir uno de sus ángulos es recto, tenemos que el cuadrado del lado opuesto es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados, es decir, se tiene el Teorema de Pitágoras,

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

Observa además que en este caso podemos hablar de hipotenusa y catetos. Sin embargo, si ahora reducimos un poco el ángulo $\angle ACB$, el lado opuesto AB disminuye su longitud y como la longitud de los lados BC y AC está fija, tenemos —en este caso— que

$$BC^2 + AC^2 > AB^2$$

¿Qué pasaría si, en lugar de disminuir el ángulo $\angle ACB$, lo incrementamos? Lo primero que podemos notar es que, como las magnitudes AC y BC están fijas y la longitud del lado AB aumenta, entonces,

$$BC^2 + AC^2 < AB^2$$

Estas observaciones nos conducen a conjeturar las siguientes proposiciones:

1. Si un triángulo tiene un ángulo menor a 90° entonces el cuadrado del lado opuesto a dicho ángulo es menor que la suma de los cuadrados de los lados adyacentes al ángulo.

2. Si un triángulo tiene un ángulo mayor a 90°, entonces el cuadrado del lado opuesto a dicho ángulo es mayor que la suma de los cuadrados de los lados adyacentes al ángulo.

(Díaz-Barriga, et al. 2021)

Se sugiere fomentar este tipo de discusiones y conjeturas, establecer relaciones que den sentido a los Teoremas y dar partida al análisis de estas propiedades, desde un sentido formal pero intuitivo.

Progresión 3: Examina el planteamiento de la Geometría Euclidiana, a través del desarrollo histórico de los postulados de Euclides, particularmente "el quinto postulado de Euclides" y considera escenarios donde no se cumple el mismo, analizando las diferencias entre la Geometría Euclidiana y no Euclidianas considerando ejemplos reales como el modelo terráqueo de la tierra, los viajes aeronáuticos y el estudio de la astronomía, lo cual permita observar cómo estas han sido de utilidad en la solución de problemas reales.

Metas	Categorías	Subcategorías
C1M2. Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	**C1.** Procedural	**S2.** Elementos geométricos
C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. **C2M2.** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento	**S1.** Capacidad para observar y conjeturar **S2.** Pensamiento intuitivo **S3.** Pensamiento formal

Anotaciones didácticas: Se busca aprovechar este momento para ahondar en cuestiones formales de la Geometría Euclidiana que permitan permear los conceptos matemáticos anteriormente abordados y su formalización a través de los 5 postulados de Euclides, revisar como conceptos básicos como el punto y la recta, son fundamentales para su desarrollo y porque son tan importantes.

Por otro lado, es importante puntualizar que no se pretende profundizar en la exploración formal de las geometrías no euclidianas, sino, explorar su existencia, propiedades principales, compararlas con la Geometría Euclidiana y entender su surgimiento, así como sus principales aportaciones a la solución de problemas reales, como el estudio astronómico a partir de la Geometría Hiperbólica y Elíptica, o el estudio de distancias sobre la tierra a partir del estudio de la Geometría esférica.

Para el estudio de geometrías no euclidianas se sugiere concentrarse en la exploración de un ejemplo y desarrollarlo a detalle. Se puede considerar el modelo terráqueo de la tierra y cómo es que los triángulos rectángulos formados por los meridianos y paralelos no cumplen la propiedad de que la suma de sus ángulos internos sea 180°. Al mismo tiempo, se sugiere aprovechar esta situación para que el estudiantado discuta la forma de la tierra: ¿cómo es que hace años se llegó a que tiene una forma esférica? y ¿cómo los modelos terráqueos cobran sentido?, más aún, ¿cómo es que a escala terrestre percibimos la tierra como plana, pero en viajes aeronáuticos debido al cambio de escala la forma esférica impacta en dichos traslados?, pues las trayectorias dejan de tener una referencia que pueda aproximarse como “plana”.

Progresión 4: Resuelve problemas de su entorno mediante la ecuación de la línea recta según necesite (punto-pendiente, pendiente ordenada al origen, dos puntos) y considera sistemas de ecuaciones lineales los cuales resuelve usando el método de Cramer o el método de Gauss-Jordan para resolver matrices y hallar su solución de manera que el estudiantado pueda analizar, comprobar e interpretar sus hallazgos y resultados.

Metas	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **C1M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritmético-algebraicos **S2.** Elementos geométricos
C3M2. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S2.** Construcción de modelos **S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.

C3M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno. **C3M4.** Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.		
C4M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural	**C4.** Interacción y lenguaje matemático	**S1.** Registro escrito, simbólico algebraico e iconográfico

Anotaciones didácticas: Se sugiere abordar esta progresión partiendo del planteamiento de una problemática que requiera el uso de ecuaciones lineales para su modelación y solución, se pueden considerar ejemplos de velocidad constante, cálculo de interés simple o programación lineal hallando la solución óptima.

Es fundamental en este punto hacer consciente al estudiantado de la importancia de definir un conjunto universal o espacio de trabajo para hallar soluciones de ecuaciones, pues, al considerar diferentes espacios, por ejemplo, la línea recta (1 dimensión), la solución $x=4$ representa un punto, mientras que al trabajar en el plano (2 dimensiones) la misma igualdad representa un conjunto solución, que es toda una línea recta, más aún, si vamos al espacio (3 dimensiones) la misma expresión $x=4$, representará un plano. Es decir, se debe poner especial cuidado en hablar del conjunto solución y conjunto universal antes de pasar a los métodos de solución.

Al mismo tiempo, resulta fundamental hacer consciente al estudiantado que un punto pertenece a una recta o a un plano, sí y sólo sí, es solución de la ecuación, dicha idea debe retomarse y reforzarse del programa de estudios de Pensamiento Matemático II, es fundamental que el estudiantado caiga en cuenta de qué significa resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones, se deben concentrar los esfuerzos en promover este entendimiento antes que el de los algoritmos de solución.

Más aún se pueden abordar ejemplos del siguiente tipo:

Debido al crecimiento de un negocio, necesitas transportar mercancía a varios puntos de la ciudad, para lo cual necesitas elegir entre dos empresas de alquiler de camiones. La primera, la empresa Transporte Castores, cobra una cuota inicial de $1,500 y luego $8 pesos por kilómetro. La segunda, Transportistas de México A.C., cobra una cuota inicial de $1,200 y luego 10 pesos por kilómetro. ¿Cuándo será la empresa Transporte Castores la mejor opción para ti? ¿Cuándo lo serán Transportistas de México?

Más aún, se sugiere abordar los métodos de Cramer y Gauss-Jordan como estrategias de solución eficientes de sistemas de ecuaciones, más no se pretende explorar en su estudio formal o demostrarlos, haciendo hincapié en cómo el método Gauss-Jordan da la posibilidad al estudiantado de abordar sistemas de ecuaciones 4x4 o de mayor dimensión, mientras que hacerlo por otros métodos requiere más trabajo.

Progresión 5: Explora la parábola como sección cónica, a través de la modelación y solución de situaciones-problema presentes en su entorno y en otras Unidades de Aprendizaje Curricular, reflexionando la manera en qué entes abstractos de la matemática se encuentran presentes en la naturaleza y le permiten describirla, haciendo uso de herramientas tecnológicas disponibles.

Metas	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **C1M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. **C1M3.** Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritmético-algebraicos **S2.** Elementos geométricos

C3M2. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno. **C3M3**. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno. **C3M4.** Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S2.** Construcción de modelos **S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.
C4M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural	**C4.** Interacción y lenguaje matemático	**S1.** Registro escrito, simbólico algebraico e iconográfico

Anotaciones didácticas: Se pretende que esta progresión sea abordada a través del planteamiento, construcción y desarrollo de modelos matemáticos donde la parábola, a través de su expresión como ecuación de segundo grado, sea la herramienta principal para solucionarlos y que el abordaje de dicho problema motive la exploración de la parábola y sus propiedades.

Se pueden abordar problemáticas de oferta y demanda, costo-ingreso, utilidad, movimiento parabólico, caída libre, área máxima, estadística, biología o nutrición.

Problemáticas como la siguiente pueden considerarse:

El productor de la obra "Carmina Burana" realizará la presentación de ésta en El Teatro Juárez en Guanajuato el cual tiene una capacidad de 769 personas. Sabe que si cobra \$50 por localidad asistirá un aproximado de 250 espectadores y si rebaja la entrada \$1 al precio inicial se lograría la asistencia de 30 *personas más. Por otro lado, él sabe que, al tener la máxima capacidad del Teatro, no logrará el máximo ingreso. Debido a eventos previos que ha organizado ha obtenido los siguientes datos respecto al ingreso y el precio de rebaja que ha dado,*

Ingreso	***Número de descuentos***
9100	*4*
9600	*6*
9100	*16*
8400	*18*

A partir de ello, el organizador quiso obtener un modelo matemático mediante el cual pueda obtener dichos puntos. Notó que por el comportamiento de crecimiento y decrecimiento un modelo lineal no podía adaptarse, así que propuso una ecuación de segundo grado al ser aquella que sigue en orden de complejidad.

¿Cuál sería el modelo que puede proponerse mediante una ecuación de segundo grado que describa este comportamiento?

¿Cuántos espectadores deben ingresar para lograr el máximo ingreso?

Para resolver este tipo de problemáticas puede plantearse un sistema de ecuaciones a partir de la expresión general de segundo grado para una variable y encontrar así la expresión general o usar software como GeoGebra o alguno análogo para llegar al modelo de ingreso, el cual es, $I(x) = -25x^2 + 500x + 7500$ donde *x* es el número de veces que se ha rebajado el precio. No se debe dar la expresión al estudiantado, ni plantear el problema con esa expresión analítica, sino fomentar que el mismo llegue a ella por medio de la exploración, el análisis, el ensayo y la propuesta de solución. La importancia de enfrentarlo a estas situaciones es que se encuentre con el reto de modelar y buscar una expresión analítica que describa el fenómeno o use herramientas a su alcance.

Por otro lado, puede usarse situaciones para explorar herramientas tecnológicas donde se grabe la trayectoria de una pelota u otro objeto como tracker y determinar la posición en cada momento de esta, o usarse para obtener la expresión analítica que describe el comportamiento de un problema, con lo que el estudiantado puede observar cómo varía la posición horizontal y vertical en cada instante del tiempo.

Progresión 6: Analiza a la circunferencia desde la perspectiva de la Geometría Analítica como una sección cónica, considerando el planteamiento y modelación de problemáticas reales a las cuales da solución usándola como herramienta, haciéndose consciente de la importancia de esta curva en el estudio de estructuras que están presentes en su entorno, usando herramientas tecnológicas a su disposición para comprobar y compartir sus resultados con sus pares.

Metas	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **C1M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. **C1M3.** Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritmético-algebraicos **S2.** Elementos geométricos
C3M2. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno. **C3M3**. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno. **C3M4.** Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S2.** Construcción de modelos **S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.

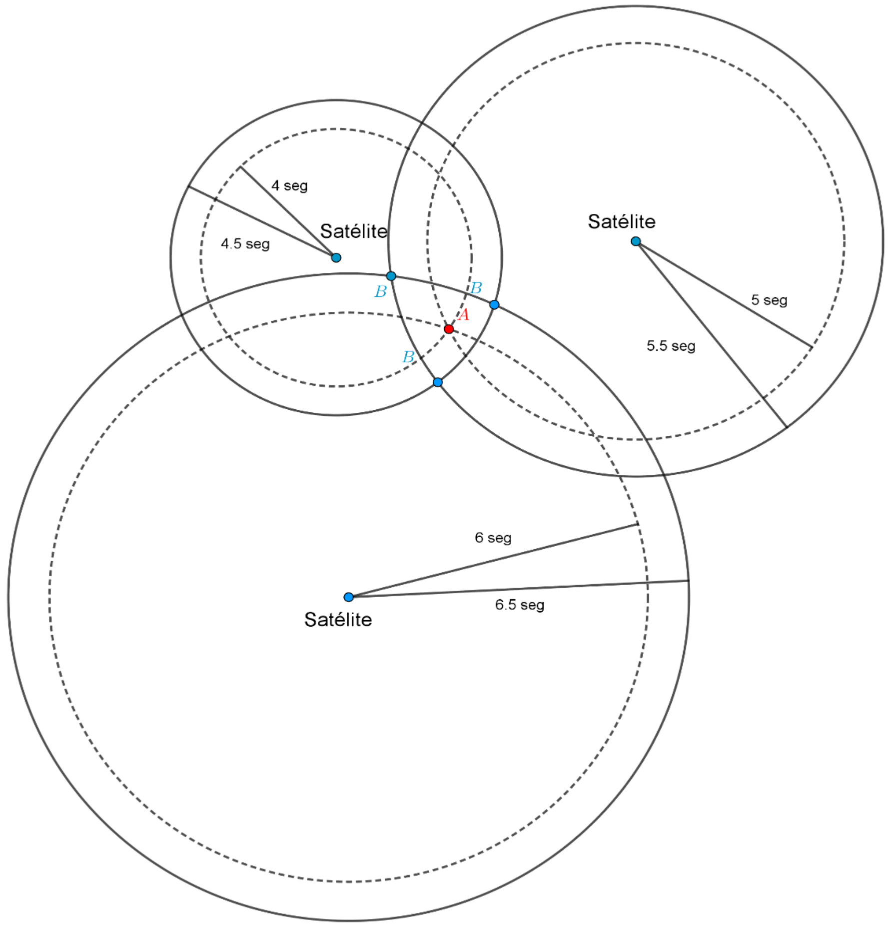
socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.		
C4M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural **C4M2.** Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	**C4.** Interacción y lenguaje matemático	**S1.** Registro escrito, simbólico algebraico e iconográfico **S2.** Ambiente matemático de comunicación

Anotaciones didácticas: Se propone abordar el estudio de la circunferencia a través del análisis de situaciones que sean de interés del estudiantado y a partir de estas, comenzar la exploración de la ecuación de la circunferencia, así como los elementos más importantes de ella.

Se sugieren abordajes como el siguiente:

¿Alguna vez te has preguntado cómo funciona la localización por GPS?

Para conocer la posición exacta de un punto, se requieren de tres señales de satélites para obtenerla cuando se está a nivel del mar. Los tres satélites emiten pulsos en momentos exactamente conocidos; en este caso, asumimos que los tres satélites emiten pulsos al mismo tiempo.



Los círculos muestran hasta dónde llegan los tres pulsos, viajando a la velocidad de la luz, en dos momentos diferentes, cada círculo etiquetado por el tiempo cuando la señal correspondiente lo alcanza. En el punto A, la señal de la parte superior izquierda llega con un retraso de 4 segundos, la de la parte superior derecha con un retraso de 5 segundos y la del satélite más lejano (inferior) se recibe después de 6 segundos. Si se tuviera un reloj perfectamente sincronizado con los relojes de los satélites, podría medirse la distancia de cada satélite anotando cuándo llegó cada pulso. Pero esto no es práctico debido a la complejidad de sincronizar los relojes. No obstante, se puede usar el reloj para medir los retrasos entre los tiempos de llegada de los pulsos de los tres satélites. Si está en el punto A en la figura, los retrasos son de 1 y 2 segundos. Luego solo hay un lugar en la Tierra donde las tres señales se detectarán con exactamente estos retrasos, que es dicho punto A.

En la figura, cada uno de los puntos B registra un par con el mismo retraso, pero no los tres. Los retrasos indican la diferencia entre sus distancias de los pares correspondientes de satélites. Sabiendo dónde están los satélites, se puede determinar la posición de intersección, un problema que fue estudiado por Apolonio y Newton.

(Dallas y Mumford, 2013)

El problema anterior se puede proceder de manera algebraica o geométrica. Usando álgebra, se plantea un sistema de ecuaciones con tres incógnitas: la posición *(x, y)* y la distancia *r* de un satélite. Dado *r* y los retrasos que pueden nombrarse d_2 y d_3 entre su señal y las otras dos, conoce su distancia de los otros satélites y estas distancias le proporcionan tres ecuaciones cuadráticas en *x, y, r,* con ello se procede a resolver.

De manera geométrica se pueden trazar las circunferencias ya sea en papel o usando un software como GeoGebra o similar. Se sugiere aprovechar la situación para explorar el uso de software.

Por otro lado, pueden considerarse planteamientos más abstractos como la siguiente,

Si en un triángulo construimos triángulos equiláteros sobre los lados de éste y construimos las circunferencias circunscritas a estos triángulos, entonces ellas se intersectan en un punto. (Díaz-Barriga, 2002).

Las cuales pueden servir como pivote en el planteamiento y desarrollo de procesos de demostración para fomentar la formalización de la geometría y la matemática.

Progresión 7: Aplica la Elipse como sección cónica para modelar y dar solución a problemáticas reales de su interés que provienen de otras Unidades de Aprendizaje Curricular, observando cómo esta curva está presente en fenómenos astronómicos y ópticos, de manera que el estudiantado analice, compruebe e interprete sus hallazgos haciendo uso de métodos analíticos y/o herramientas tecnológicas disponibles.

Metas	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **C1M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. **C1M3.** Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritmético-algebraicos **S2.** Elementos geométricos

utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.		
C3M2. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno. **C3M3**. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno. **C3M4.** Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S2.** Construcción de modelos **S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.
C4M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	**C4.** Interacción y lenguaje matemático	**S1.** Registro escrito, simbólico algebraico e iconográfico

Anotaciones didácticas: Se recomienda en esta situación, considerar algunas problemáticas que se puedan explicar a través del uso de la elipse, por ejemplo, considerar las órbitas planetarias y a partir de la exploración de la ecuación de la elipse y sus propiedades básicas se podrá determinar la trayectoria. Más aún, podría ser interesante cuestionar cómo es que se mueven a la vez, la tierra alrededor del sol y la luna alrededor de la tierra y dar partida al estudio de la sincronización de movimientos de cuerpos celestes.

No se pretende que la progresión se aborde comenzando con el estudio formal o abstracto de la elipse.

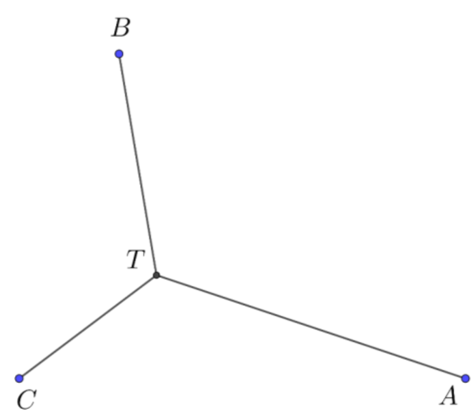
Puede resultar interesante en este momento explorar algunas de las leyes propuestas por Johannes Kepler, como establece que "Los planetas se mueven con velocidad areolar constante alrededor del sol", considerando para ello la aplicación de la elipse y aprovechar la situación para mostrar al estudiantado cómo es que al momento de la modelación matemática se busca usar herramientas disponibles que se adecúen al fenómeno que se busca describir, pues, el trabajo científico se basa en un constante ensayo y modificación de modelos, los cuales se van adecuando y adaptando para describir un fenómeno.

Resulta importante hacer notar al estudiantado que todas estas leyes se construyen a través del análisis y no siempre se "descubren" simplemente, es decir, se propone un modelo y se adapta según se requiera para finalmente proponer leyes.

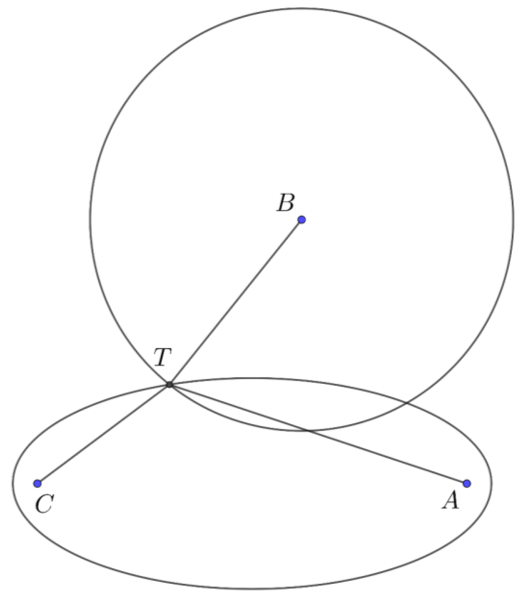
Otra situación que puede establecerse en esta progresión es la siguiente:

Se tienen construidas tres casas, de tal manera que si consideramos los vértices de un triángulo, este último es tal que sus ángulos miden menos de 120°. Se desea instalar un tinaco que surta de agua a las tres casas. ¿En dónde debe colocarse, de tal manera que la cantidad de metros de tubo que se utilicen para llegar del tinaco a las tres casas sea la menor posible?

(Díaz-Barriga, 2002).

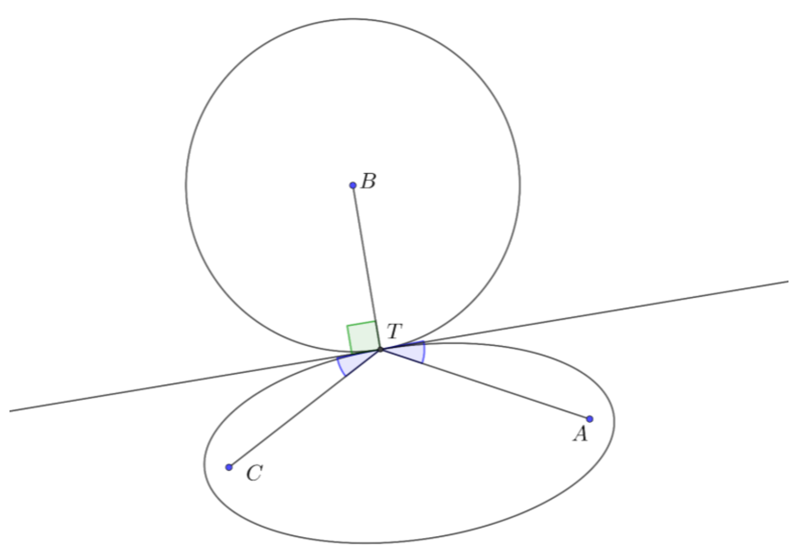


El cual puede solucionarse usando la elipse como sigue:



Supongamos que conocemos el punto T. Tracemos la elipse con focos C y A, que pasa por T, y la circunferencia con centro en B y radio BT, como se ve en la figura anterior.

Supongamos que estas dos curvas son tangentes. Si no lo fueran, estas curvas se cortarían en otro punto como se ve en la figura, por lo que la elipse entraría a la circunferencia y cualquier punto de la elipse que estuviera dentro de la circunferencia sería tal que, la suma de sus distancias a los vértices del triángulo sería menor que la suma de sus distancias de T a los vértices, que hemos supuesto es mínima. De esta manera, el ángulo BTC mediría lo mismo que el ángulo ATB. Construyendo ahora la elipse con focos A y B y que pase por T, y la circunferencia con centro en C y radio CT, por un razonamiento análogo tenemos que el ángulo CTA y el ángulo BTC también miden lo mismo. Por lo que el punto T es tal que la medida de los ángulos CTA, ATB y BTC es 120°, por lo que se trata del punto localizado en el segundo ejercicio de la progresión 6.



Progresión 8: Aplica la ecuación general de segundo grado para dos variables considerando la sección cónica según lo requiera, para modelar y dar solución a problemáticas contextualizadas de otras Unidades de Aprendizaje Curricular haciendo uso de herramientas tecnológicas disponibles.

Metas	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **C1M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. **C1M3.** Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritmético-algebraicos **S2.** Elementos geométricos
C3M2. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno. **C3M3**. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S2.** Construcción de modelos **S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.

sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno. **C3M4.** Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.		
C4M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	**C4.** Interacción y lenguaje matemático	**S1.** Registro escrito, simbólico algebraico e iconográfico

Anotaciones didácticas: Se sugiere abordar esta progresión considerando dos momentos, el primero mostrando al estudiantado el porqué las secciones cónicas reciben ese nombre, a partir de considerar el corte de un cono con un plano en diferentes ángulos y secciones. Se sugiere usar software, videos o imágenes para mostrar los diferentes tipos de cortes entre el plano y el cono.

Más aún, se puede aprovechar el momento para explorar las esferas de Dandelin y analizar cómo estas se encuentran en el cono, tocando a un plano tangente a las mismas.

En un segundo momento se debe examinar la relación que tiene la expresión analítica o algebraica con la sección cónica correspondiente, fomentar el análisis del estudiantado de la diferencia de términos en cada expresión analítica, considerando las diferencias entre la parábola, la circunferencia, la elipse y si el grupo lo permite, puede examinarse el caso de la hipérbola. Se sugiere examinar casos extremos, como aquellas secciones cónicas que se obtienen al intersecar un cono con un plano en el vértice, generando un punto y como al mover el plano hacia abajo se generan las otras secciones cónicas dependiendo de la inclinación y observará que algebraicamente las secciones cónicas corresponden al conjunto solución de la intersección del cono y el plano.

No se pretende que el estudiantado conozca de memoria todos los casos posibles con sus ecuaciones, sino que, razone lo que ocurre en cada caso y observe la relación entre los términos de la expresión algebraica y la figura generada, es decir, que haga una reflexión sobre los casos, pero no se prioriza la memorización de expresiones, se deben considerar razonar ejemplos tales como que la expresión,

$$x^2 + y^2 = 0,$$

es un punto, y que la expresión

$$x^2 - y^2 = 0,$$

es la intersección con la generatriz del cono, todo esto para formalizar y dar sentido a las progresiones anteriores.

Progresión 9: Interpreta los fractales como entes matemáticos presentes en la naturaleza, las estructuras sociales y en su entorno, mediante la descripción de su definición y el conocimiento de algunos de los ejemplos más importantes, como el conjunto de Cantor, el Triángulo de Sierpinsky, el Copo de Nieve de Koch, el Conjunto de Mandelbrot, el Conjunto de Julia, el Conejo de Douady y analiza algunas propiedades de estos apoyándose de herramientas tecnológicas disponibles.

Metas	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **C1M2.** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto..	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritmético-algebraicos **S2.** Elementos geométricos
C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. **C2M2.** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento	**S1.** Capacidad para observar y conjeturar **S2.** Pensamiento intuitivo

Anotaciones didácticas: Se puede motivar el estudio de los fractales a partir de planteamientos como el siguiente:

¿Cuánto mide la costa del golfo de México?

A partir de ello y la paradoja de la línea de costa, observar su utilidad en la aproximación para la medición de líneas costeras, resulta interesante explorar el análisis desarrollado por Benoît Mandelbrot, observar cómo al usar una escala muy grande resulta impreciso calcular la distancia y al acercarse mucho parece no estar definida.

También se sugiere estudiar algunas propiedades particulares de los fractales como, la autosimilitud, la simetría de *zoom*, la dimensión fraccionaria y observar las relaciones que hay entre perímetro y área de algunos de estos ejemplos, por ejemplo, el copo de nieve de Koch, que tiene un perímetro finito pero un área infinita.

Por otro lado, se puede aprovechar la oportunidad para mostrar algunas aplicaciones importantes de los fractales, como lo son las antenas fractales usadas en electrónica o la caracterización de la estructura de los pulmones, vasos sanguíneos, neuronas o intestinos del cuerpo humano, más aún, estos son útiles para la descripción de estructuras de paisajes en Ecología o en la visión de robots.

Finalmente pueden abordar fractales más complejos o interesantes como el conjunto de Mandelbrot, el conjunto de Julia o el conejo de Douady, en sentido de explorar su forma, historia e implicaciones, más no profundizar en su construcción ni análisis matemático, finalmente, se puede ahondar en el estudio del Caos y como los fractales se relacionan con este tópico y se usan para su estudio.

Se sugiere la revisión del siguiente documento:

https://ri-ng.uaq.mx/bitstream/123456789/6022/1/RI003135.pdf

Se adjunta software en R, para generar el conjunto de Mandelbrot:

https://drive.google.com/file/d/1yugdgZK-gOq9erHEnaM8B4pC_CxfxW0N/view?usp=sharing

Para poder generarlo se necesita tener instalado el Software R.

IV. Transversalidad

Entendemos por transversalidad al enfoque de alta interacción entre áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos y recursos socioemocionales del MCCEMS. Estudios que poseen cierta relación con dicha concepción (Eronen, L., et al., 2019, Drake, S. M., & Burns, R. C., 2004) nos hablan de un espectro que comprende lo multidisciplinario (diferentes disciplinas se integran alrededor de un tema común), lo interdisciplinario (la organización curricular alrededor de aprendizajes comunes a través de disciplinas) y la transdisciplinariedad (basada en interrogantes que las y los estudiantes pueden hacerse y en sus inquietudes por desarrollar habilidades para la vida real dentro de contextos reales). Al ser integrado como un recurso sociocognitivo al MCCEMS, el pensamiento matemático adquiere una función transversal dentro de dicha estructura. Esto no implica que todo cuanto se trabaje con las y los estudiantes acerca del pensamiento matemático deba de transversalizarse, pues existirán momentos en que la disciplina demande trabajo sobre sí misma para poder continuar con un desarrollo integral.

El pensamiento matemático al posicionarse junto con los demás recursos sociocognitivos cumple una función de soporte para que el estudiantado pueda consolidar sus conocimientos de las demás áreas. Son evidentes los puntos de encuentro entre el pensamiento matemático y las ciencias sociales (al estudiar fenómenos económicos o poblaciones, por poner un par de ejemplos), con las ciencias naturales, experimentales y tecnología (al hacer uso del lenguaje matemático para describir diversas leyes de la física o la química, al utilizar modelos matemáticos para ayudar en la explicación de algunos sistemas biológicos, etc.), con las humanidades (partiendo del hecho de que la propia matemática es obra creativa del ser humano y que muchas veces ha estado inmersa en diversos desarrollos artísticos).

El pensamiento geométrico que se desarrolla principalmente en esta UAC resulta esencial para fomentar el pensamiento matemático y el razonamiento del estudiantado, mismo que da partida al estudio de los demás recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y áreas de conocimiento, donde son evidentes puntos de encuentro en el análisis y entendimiento de las formas, estructuras y espacios. El entendimiento e interpretación del entorno depende especialmente de nuestra relación con su forma, el estudio de figuras geométricas que se encuentran en él y de su análisis, el estudio de los elementos y propiedades de las figuras geométricas, sus relaciones y el planteamiento analítico de rectas, curvas y cónicas, lo anterior para el estudio de los entes abstractos en todas las ciencias.

Es importante decir que la transversalidad tanto con áreas de conocimientos como con recursos socioemocionales y sociocognitivos puede operar en dos niveles fundamentales: en un primer nivel a través de esos puntos de contacto existentes con las demás disciplinas a las que nos referíamos en el párrafo anterior; pero también en un segundo nivel, si se quiere más profundo, en donde la interiorización de las habilidades relacionadas con el pensamiento matemático permiten una mejor comprensión, una ordenación mental más clara y permiten también una mayor profundidad dentro de las demás experiencias cognitivas.

A pesar de la importante función que se le otorga al pensamiento matemático, no debemos olvidar que nosotras y nosotros, como docentes de pensamiento matemático, no tendremos necesariamente un lugar protagónico en la escuela.

El trabajo colaborativo, tan esencial para el desarrollo del programa aula, escuela y comunidad, asume interacciones profesionales y respetuosas en la que todas y todos los agentes involucrados en la educación, entre los que nos encontramos nosotros y las y los colegas de otras áreas y recursos, valoren la función y las aportaciones de todos los demás.

Más aún, es necesario que logremos enseñar con perspectiva socioemocional, pues enseñamos a seres humanos que merecen todo nuestro respeto y también debido a que logrando consolidar un ambiente de confianza mutua podremos desempeñar mejor nuestra importante labor.

V. Recomendaciones para el trabajo en el aula y la escuela

En este apartado se brinda una propuesta de trabajo en el aula y la escuela, se enuncian los siguientes ejemplos que brindan una orientación metodológica para abordar las progresiones. Enseguida se presentan algunos ejemplos didácticos de cómo se pueden abordar algunas progresiones. Se sugieren tres momentos principales para su abordaje.

Momento 1. Identificar la progresión y comprender sus componentes.

Momento 2. Diseñar un plan de clase para alcanzar las metas de aprendizaje.

Momento 3. Diseñar una evaluación y considerar el proceso de retroalimentación

VI. Evaluación formativa del aprendizaje

Para profundizar sobre el tema de evaluación formativa y la retroalimentación se sugiere revisar el documento de Orientaciones para la Evaluación del Aprendizaje en el siguiente enlace:

https://dgb.sep.gob.mx/storage/recursos/2024/04/6mL0WsYtNp-Orientaciones-para-la-evaluacion-del-aprendizaje-(1).pdf

VII. Recursos didácticos

Las siguientes fuentes de información constituyen sugerencias de apoyo para el abordaje de las progresiones, no son limitativas, ni restrictivas. El personal docente podrá usar estas y también podrá utilizar las que considere adecuadas según sus necesidades y contexto.

Básica

- Braun, E. (2003). *Caos, fractales y cosas raras*. ISBN 968166843X, 9789681668433.
- Bulajich-Manfrino R. y Gómez-Ortega J. A. (2002). *Geometría*. UNAM, Instituto de Matemáticas. ISBN 9703204449, 9789703204441
- Dallas, H., y Mumford, D. (2013). *¿Qué matemáticas sirven a la mayoría de los estudiantes estadounidenses del siglo XXI?*. Traducido por Héctor Franco Gutiérrez. UCLA.
- Díaz Barriga, A. (2002). *Triángulo de Napoleón y cuadrados pitagóricos*. En Briseño, A. y Díaz-Barriga, A. *Matemáticas Aplicadas y su Enseñanza*. Editorial Iberoamérica.
- Swokowski E. W y Cole J. A (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* ISBN. 6074816123, 9786074816129
- Lehmann, Charles H. (1984). *Geometría Analítica*. ISBN 9681811763, 9789681811761.
- Oteyza, E. y Lam, E. (2001). *Geometría analítica y trigonometría*. Pearson Educación. ISBN. 9702601002

Complementaria

- Baldor A. (2020). *Geometría y trigonometría.* Grupo Editorial Patria. ISBN. 9786075502069.
- Euclides (1991). *Elementos.* Editorial Gredos. ISBN. 9788424931926
- Hernández-Méndez D. M. (1999). *Una propuesta para la enseñanza de la geometría fractal en el bachillerato*. UAQ. Recuperado de https://ri-ng.uaq.mx/bitstream/123456789/6022/1/RI003135.pdf
- Hitt, F., y Quiroz-Rivera, S. (2017). Aprendizaje de la modelación matemática en un medio sociocultural. Revista colombiana de educación, (73), 153-177.
- Larson R., Edwards B. H., Falvo D.C. (2004). *Álgebra lineal.* Pirámide. ISBN. 9788436818789.
- Mandelbrot, B. (1967). *How long is the coast of Britain? Statistical self similarity and fractional dimension*. Science, 636-638.
- Mandelbrot, B. (1996). *Del azar benigno al azar salvaje. Investigación y ciencia, 14-20.* Obtenido de https://zubietxe.org/wpcontent/uploads/2013/12/NIYC1296_014.pdf

- Mandelbrot, B. (2014). El fractalista: memorias de un científico inconformista. Tusquets.
- Peitgen, H., Jürgens, H., y Saupe, D. (2012). *Fractals for the classroom: part two: complex systems and mandelbrot set.* Springer Science & Business Media.
- Peitgen, H., Jürgens, H., y Saupe, D. (2013). *Fractals for the classroom: part one: introduction to fractals and chaos.* Springer Science and Business Media
- Perelman, Y. (2015). *Álgebra Recreativa*. CreateSpace Independent Publishing Platform. ISBN. 9781508900894.
- Perelman, Y. (2000). Matemáticas Recreativas. Planeta Publishing Corporation. ISBN. 9788427025677
- Ramírez-Galarza A. I (2004I. *Geometría analítica, Una introducción a la geometría.* Facultad de ciencias, UNAM.
- Ramírez-Galarza A. I. y Sienra-Loera G (2003). *Invitación a las geometrías no euclidianas.* Facultad de ciencias, UNAM.
- SEMS a. (2023). *Orientaciones Pedagógicas del Recurso Sociocognitivo de Pensamiento Matemático.* Obtenido de https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/13634/1/images/Orientaciones%20pedag%C3%83%C2%B3gicas%20-%20Pensamiento%20Matem%C3%83%C2%A1tico%20.pdf
- SEMS b. (2023). *Programa de estudio del recurso sociocognitivo Pensamiento Matemático I*. Obtenido de https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/13634/1/images/Pensamiento%20Matem%C3%83%C2%A1tico%20I.pdf
- SEMS c. (2023). *Programa de estudio del recurso sociocognitivo Pensamiento Matemático II.* Obtenido de https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/13634/1/images/Pensamiento%20Matematico%20II.pdf
- SEMS d. (2023). *Programa de estudio del recurso sociocognitivo Pensamiento Matemático III*. Obtenido de https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/13634/1/images/Pensamiento%20Matematico%20III.pdf
- Silva, J. (2010). *Fundamentos de Matemáticas: álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo*. Limusa. ISBN 9789681867591.
- Swokowski, E. y Cole, J. (2018). *Precálculo: Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Cengage Learning. ISBN:9786077254867.
- Talanquer, V. (1996). *Fractus, fracta, fractal*. Fondo de Cultura Económico

Electrónica:

- El Aula Enriquecida con Tecnología Digital https://www.imat-x.com/aetd
- Geogebra. Graficador y herramienta para geometría https://www.geogebra.org/?lang=es
- **Parábola.** El interactivo permite ver cómo se construye la parábola al mover un punto respecto del foco.
- https://www.geogebra.org/m/nDUUv3Zg

- **Elipse**. Se incluyen dos interactivos, uno para ver a la elipse como una cónica y otro con aplicaciones a trayectorias planetarias.
- https://www.geogebra.org/m/kkxjmgmf
- https://www.geogebra.org/m/jkcwazkx
- WolframAlpha. Software y herramienta poderosa para el desarrollo de matemáticas en general. https://www.wolframalpha.com/
- Aplicacion para celular calculadora para cálculo diferencial y cálculo integral "Symbolab" https://es.symbolab.com/
- Recursos didacticos para profesores https://appsparaprofes.com/tabla/

VIII. Rol docente

Realizar una evaluación final y sumativa en la que se explique al estudiantado en qué consiste la valoración del producto designado.

Compartir los propósitos educativos y los criterios de logro o metas de aprendizaje con tus estudiantes.

Diseñar e implementar actividades que evidencien lo que el alumnado está aprendiendo.

Ofrecer retroalimentaciones formativas sobre los productos que estén elaborando.

Mediador del aprendizaje.

Promotor del pensamiento crítico y guía del estudio independiente.

Como parte del proceso metacognitivo donde las y los estudiantes deben autoevaluarse y coevaluarse se sugiere tener presente preguntas como:

¿A dónde voy? (que permite establecer reglas)

¿Cómo voy? (favorece el monitoreo del aprendizaje)

¿A dónde ir ahora? (donde requiere la revisión de su trabajo y ajustes necesarios)

¿Para qué me sirve lo que acabo de aprender? (otorga relevancia a los aprendizajes)

¿Cómo trabajó mi compañero?

¿Cómo podemos mejorar como equipo?

IX. Rol del estudiantado

El rol del estudiantado en el proceso educativo no se limita simplemente a recibir información y repetirla, sino que debe ser un agente activo en la construcción de su propio conocimiento y de su identidad. En este sentido, no sólo se trata de aprender a leer y escribir; implica aprender a narrar y comprender su propia vida, tanto como autor o autora de su historia personal, como testigo de su contexto social y cultural. Este proceso es fundamental para que el estudiantado se convierta en un sujeto consciente y crítico de su realidad.

La educación es un motor de transformación social, pero también puede perpetuar las desigualdades existentes al tratar a todos y todas por igual sin considerar la diversidad inherente al estudiantado. La educación debe empoderarles, dándoles las condiciones necesarias para reconocer y cuestionar las desigualdades que les rodean.

Si las y los estudiantes son insertados en una educación que no considera su clase, sexo, género, etnia, lengua, cultura, capacidad, condición migratoria, religión o cualquier otro aspecto de su identidad, es muy probable que se apropien de la idea de que "la escuela no es para ellos y ellas", ya que se enfrentarían constantemente a comentarios o actitudes que les califican de incapaces, ignorantes, indolentes o inútiles terminando por creerlo y asumirlo como verdad. Esta autodesvalorización es una barrera significativa para su desarrollo ya que puede llevar a creer que el conocimiento y la sabiduría pertenecen únicamente a las y los "profesionales" y no reconocen el valor de su propio conocimiento y experiencia.

El rol de las y los estudiantes, entonces, debe ser el de un sujeto activo que desafía y transforma estas narrativas opresivas que fomentan las desigualdades. Debe aprender a valorar su propia voz y experiencia, y a reconocer su capacidad para conocer y transformar su realidad. La educación debe ser un proceso liberador que les permita verse a sí mismos o mismas como agentes de transformación social, capaces de escribir su propia historia y de participar activamente en la construcción de una sociedad más justa y humana.

X. Tecnologías de la Información, Comunicación, Conocimiento y Aprendizaje Digital (TICCAD)

La implementación de las TICCAD en la planeación didáctica representa una oportunidad para enriquecer la experiencia educativa, al facilitar el desarrollo de las habilidades, saberes y competencias digitales, potenciar la creatividad y motivación del estudiantado y favorecer la labor del profesorado. (Aprende.mx, 2022).

Al transversalizar el uso de las TICCAD, se busca integrar sus herramientas de manera horizontal a lo largo de todas las Unidad de Aprendizaje Curricular, en lugar de relegarlas a un recurso sociocognitivo específico. Esto permite que las y los estudiantes desarrollen habilidades digitales de manera progresiva y coherente a lo largo de su formación académica, independientemente del área de conocimiento en la que se encuentren.

No obstante, resulta crucial que la integración de las TICCAD se realice considerando las particularidades de cada plantel, su infraestructura, el nivel de competencia digital del personal docente y el estudiantado, así como los recursos disponibles. De esta manera, se garantiza que estas herramientas se utilicen de manera efectiva y se maximice su impacto en el proceso educativo.

Al integrar las TICCAD en la planeación didáctica de acuerdo con las posibilidades de cada plantel, las y los docentes pueden enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje, promoviendo la participación activa de sus estudiantes, fomentando el pensamiento crítico y creativo, y facilitando el acceso a una educación de excelencia para todos y todas.

XI. Referencias

ACUERDO número 09/05/24 que modifica el diverso número 09/08/23 por el que se establece y regula el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior. Secretaría de Educación Pública. DOF. (2024) Fecha de citación [06-06-2024]. Disponible en formato HTML: https://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5729564&fecha=05/06/2024#gsc.tab=0

Aprende.mx. (1 de mayo de 2022). TICCAD. Nueva Escuela Mexicana. Recuperado de: https://nuevaescuelamexicana.sep.gob.mx/detalle-recurso/20711/

ACUERDO número 09/08/23 por el que se establece y regula el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior. Secretaría de Educación Pública. DOF. (2023) Fecha de citación [11-01-2024]. Disponible en formato HTML: https://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5699835&fecha=25/08/2023#gsc.t

Aprende.mx. (1 de mayo de 2022). TICCAD. Nueva Escuela Mexicana. Recuperado de: https://nuevaescuelamexicana.sep.gob.mx/detalle-recurso/20711/

Dirección General del Bachillerato. (2023). *Orientaciones para la Evaluación del Aprendizaje*. DGB.

Dirección General del Bachillerato. (2024). *Orientaciones Psicopedagógicas para la Elaboración de Programas de Estudio y Progresiones de Aprendizaje*. DGB.

Subsecretaría de Educación Media Superior. (2023e). *Progresiones de Aprendizaje del Recurso Sociocognitivo Lengua y Comunicación Lengua Extranjera Inglés I.* SEP.

Subsecretaría de Educación Media Superior. (2023f). *Progresiones de Aprendizaje del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático I.* SEP.

Créditos

Elaboradores 2DA mesa

José Alfredo Zavaleta Viveros

Colegio de Bachilleres del Estado de Veracruz

Carlos Abel Eslava Carrillo

Preparatoria Federal "Lázaro Cárdenas" 1/1

Elaboradores y elaboradoras 1RA mesa

José Alfredo Zavaleta Viveros

Colegio de Bachilleres del Estado de Veracruz

Carlos Abel Eslava Carrillo

Preparatoria Federal "Lázaro Cárdenas" 1/1

Dennis Couoh Haas

Colegio de Bachilleres del Estado de Campeche

Neyser Darío Constantino López

Colegio de Bachilleres del Estado de Chiapas

Jairzinho Arturo Quintana Torres

Colegio de Bachilleres del Estado de Chihuahua

Héctor Marlon Aguilar Arellanes

Colegio de Bachilleres del Estado de Oaxaca

Cristian Miguel Burgueño Luna

Colegio de Bachilleres del Estado de Sinaloa

Luis Marcos Rocha Castro

Preparatoria Federal "Lázaro Cárdenas" 1/2

Asesor COSFAC

Andrés Alonso Flores Marín

Asesor Especial

Alejandro Javier Díaz Barriga Casales

Personal académico de la Dirección General del Bachillerato que coordinó

Jorge Alejandro Rangel Sandoval

Héctor Franco Gutiérrez

Brenda Nalleli Durán Orozco

Juan Miguel Hernández González

Mercedes Gabriela Castro Nava

Johan Cruz Saavedra

La construcción de estas Progresiones de Aprendizaje no hubiera sido posible sin la valiosa contribución y retroalimentación de las y los docentes de Educación Media Superior a lo largo de todo el país.

La Dirección General del Bachillerato agradece y reconoce a todas las personas que colaboraron en la construcción de este documento con sus valiosas aportaciones.

Educación

Secretaría de Educación Pública

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

DGB